

# Un metodo delle celle mortar per problemi elettrotermici di contatto

P. Alotto\*, F. Freschi\*\*, M. Guarnieri\*,  
F. Moro\*, M. Repetto\*\*, A. Stella\*

\*Dip. di Ingegneria Elettrica, Università di Padova

\*\*Dip. di Ingegneria Elettrica, Politecnico di Torino

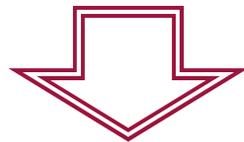
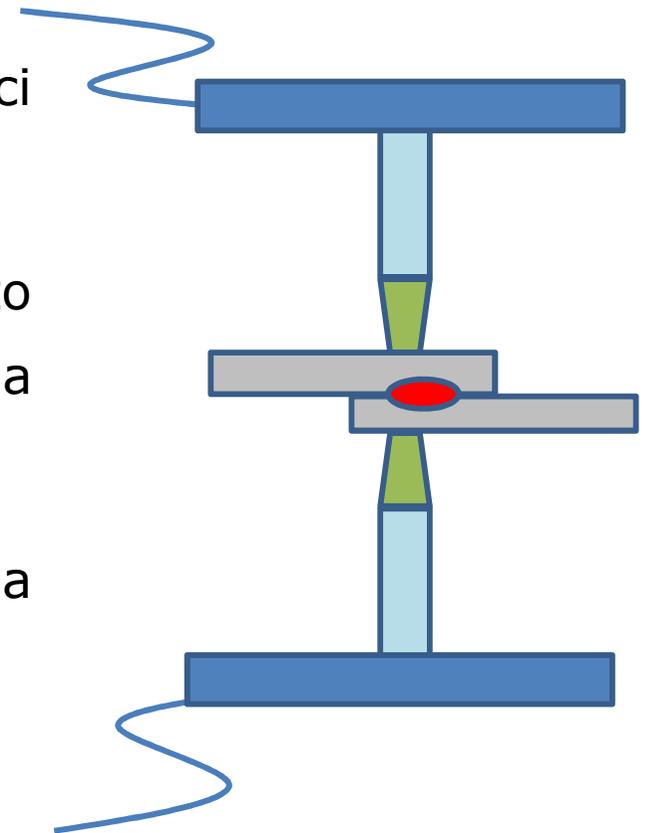
*XXVII Riunione Annuale dei Ricercatori di Elettrotecnica  
15 - 17 Giugno 2011, Bologna*

# Sommario

- Modellazione multiphysics dei problemi di contatto
- Metodo domain decomposition (DD):
  - ✓ Formulazione elettro-termo-meccanica nelle regioni di bulk (connettori) basata sul metodo delle celle
  - ✓ Formulazione mortar: accoppiamento tra le regioni in contatto e definizione del problema di campo all'interfaccia
  - ✓ Modellazione semi-analitica del contatto (teoria di Holm)
- Risultati numerici e confronto con FEM 3D
- Attività sperimentale
- Conclusioni e sviluppi

# Modellazione del contatto elettrico

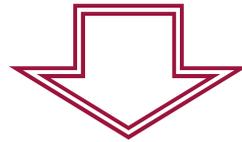
- Settori di applicazione industriale: es. saldatura a resistenza (ERW), formatura, micro-connettori...
- Complessità: problemi elettrici, termici e meccanici fortemente accoppiati e non lineari
- Problema multiscala: il riscaldamento per effetto Joule dipende dalla resistenza di contatto, legata a sua volta alle caratteristiche locali delle superfici
- Pacchetti software FEM commerciali non adatti a simulazioni multiphysics di tale complessità



***Implementazione di metodi numerici ad hoc***

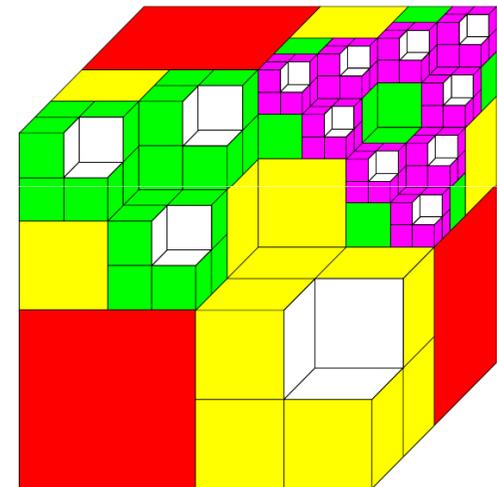
# Metodi Domain Decomposition (DDMs)

- I connettori sono regioni topologicamente disconnesse
- La resistenza di contatto produce una d.d.p all'interfaccia

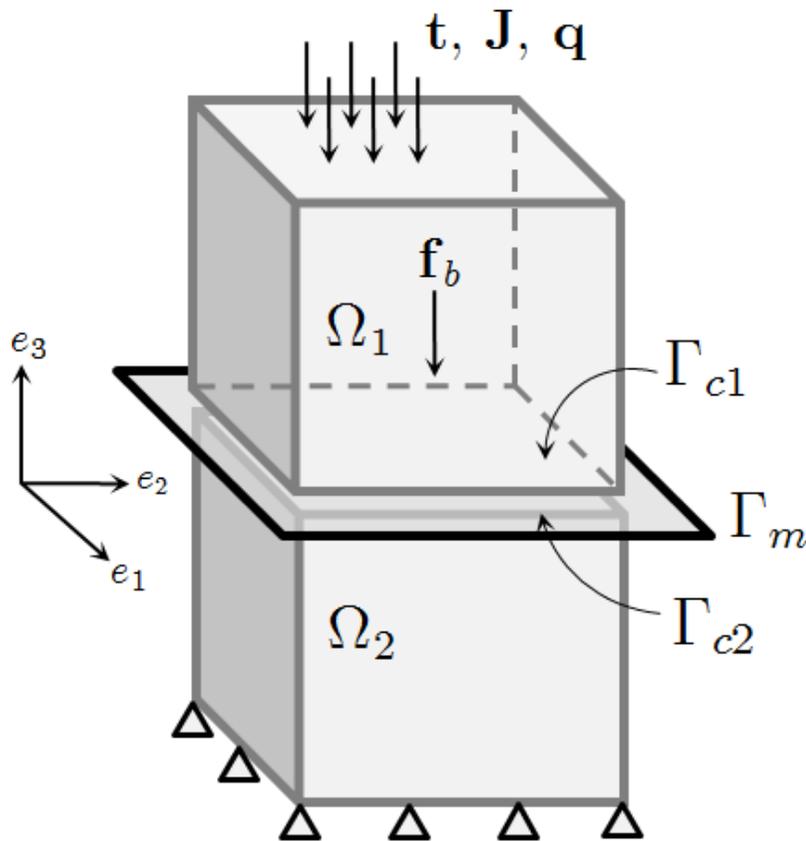


**Strategia di modellazione più efficace: tecniche DDMs**

- ✓ Il dominio computazionale è ripartito in sotto-domini che possono sovrapporsi o meno
- ✓ Continuità tra sotto-domini imposta con metodi diretti e/o iterativi
- ✓ Calcolo parallelo di ciascun sotto-dominio
- ✓ Possibilità di imporre condizioni di interfaccia



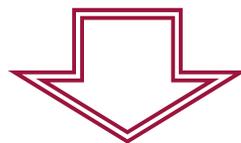
# Problema di contatto elettro-termo-meccanico



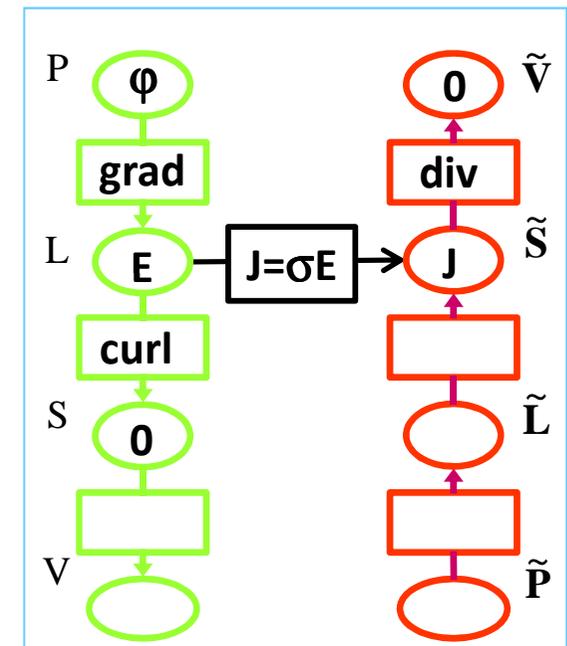
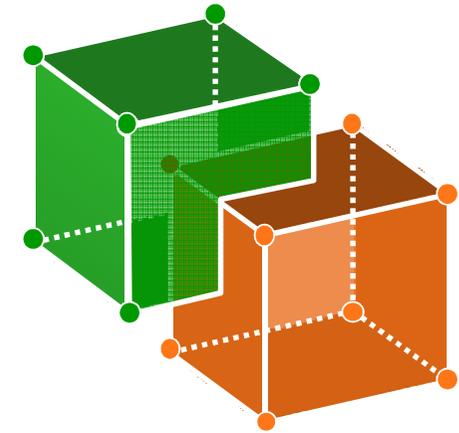
$\Omega_1, \Omega_2$	connettori
$\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}$	superfici di contatto
$\Gamma_m$	superficie mortar
$f_b$	forza di volume
$J$	densità di corrente
$q$	flusso termico
$t$	trazione

# Formulazione DD basata su metodo delle celle

- Equazioni di campo sono espresse nella stessa forma (algebrica) su diverse scale spaziali
- Complessi di celle primali e duali sono sistemi di riferimento su cui sono definiti i gradi di libertà
- Gli operatori discreti **grad**, **div**, **rot** legano quantità locali definite sullo stesso complesso di celle
- Le equazioni costitutive legano variabili definite su complessi di celle distinti (es.  $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ )



I metodi DD adatti per l'analisi di problemi di contatto possono essere formulati in modo più semplice grazie al metodo delle celle



# Modello elettro-termico (regioni di bulk)

## Problema elettrico

$$\begin{cases} \mathbf{e} = -\mathbf{G} \mathbf{v} \\ \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{j} + \mathbf{Q}^T \mathbf{j}_c = \mathbf{j}_s \end{cases}$$

Equazioni di bilancio

## Problema termico

$$\begin{cases} \mathbf{t} = -\mathbf{G} \theta \\ \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{q}_c = \mathbf{w}(\mathbf{v}, \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \mathbf{M}_\sigma(\theta) \mathbf{e} \end{cases}$$

Equazioni costitutive non-lineari

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{M}_\lambda \mathbf{t} \end{cases}$$



## Equazioni di Poisson

$$\begin{cases} \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\sigma(\theta) \mathbf{G} \mathbf{v} + \mathbf{Q}^T \mathbf{j}_c = \mathbf{j}_s \\ \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\lambda \mathbf{G} \theta + \mathbf{Q}^T \mathbf{q}_c = \mathbf{w}(\mathbf{v}, \theta) \end{cases}$$

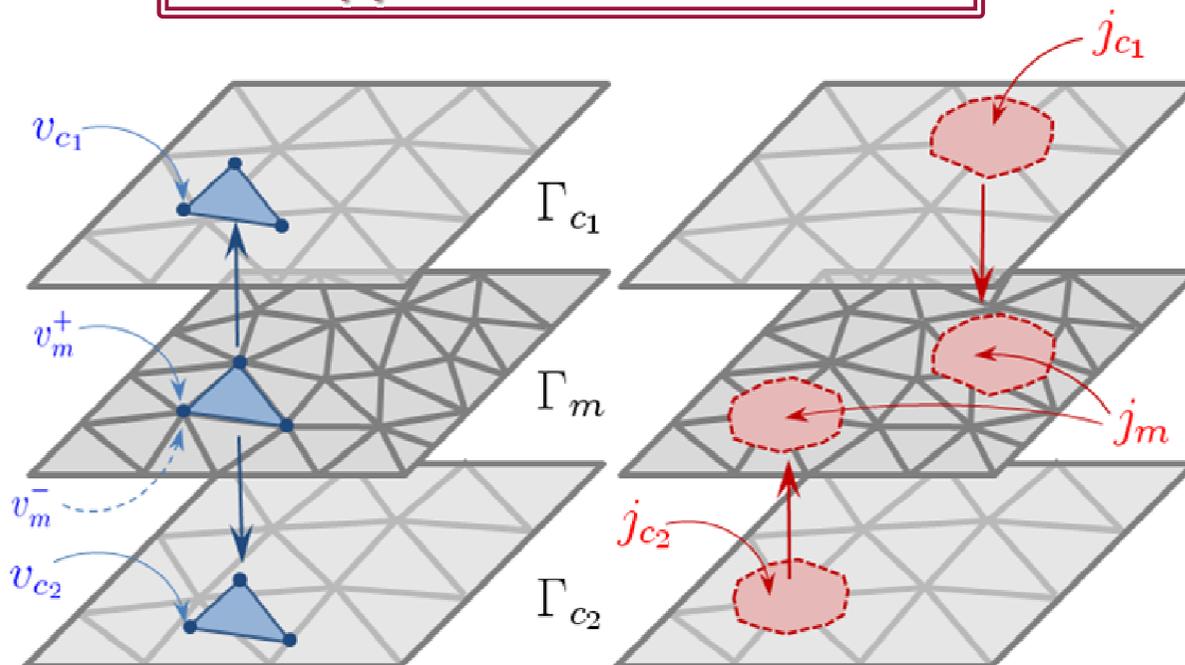
Variabili di accoppiamento all'interfaccia

# Modello elettro-termico (interfaccia contatto)

Formulazione mortar: i gradi di libertà sono proiettati dalle sup. di contatto  $\Gamma_{c1}$ ,  $\Gamma_{c2}$  alla sup. mortar  $\Gamma_m$ , e viceversa



**Accoppiamento simmetrico**



Equazioni costitutive ( $\Gamma_m$ )

$$\begin{cases} \mathbf{j}_m = -\mathbf{M}_{\sigma C} [\mathbf{v}_m] \\ \mathbf{q}_m = -\mathbf{M}_{\lambda C} [\theta_m] \end{cases}$$

Cons. flussi – LKC ( $\Gamma_c$ )

$$\begin{cases} \tilde{P} \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_c = \mathbf{0} \\ \tilde{P} \mathbf{q}_m + \mathbf{q}_c = \mathbf{0} \end{cases}$$

Cons. potenziali – LKT ( $\Gamma_m$ )

$$\begin{cases} [\mathbf{v}_m] = \mathbf{P} \mathbf{v}_c \\ [\theta_m] = \mathbf{P} \theta_c \end{cases}$$

# Conducibilità contatto: modello semi-analitico

Distribuzione statistica della  
conducibilità di contatto

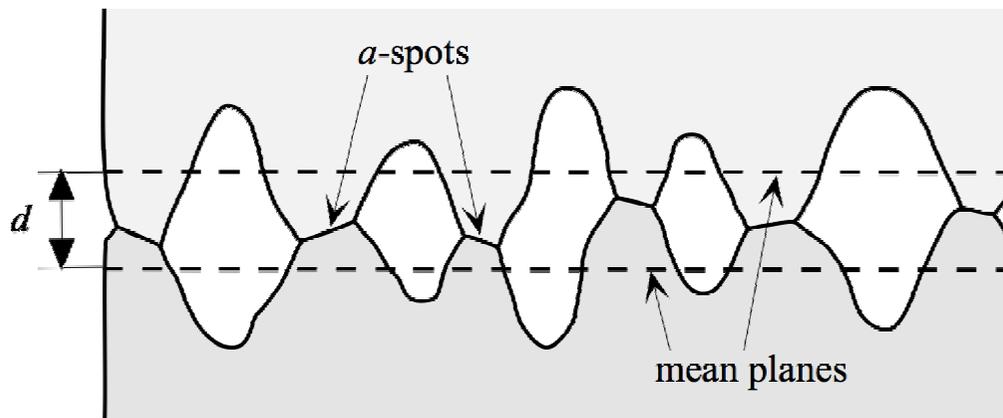
$$g_c(p, \lambda) = \frac{m\sigma}{2\sqrt{2\pi}r} \frac{\exp(-\lambda^2)}{(1 - \sqrt{p/H})^{3/2}}$$

$$p = \frac{H}{2} \operatorname{erfc}(\lambda)$$

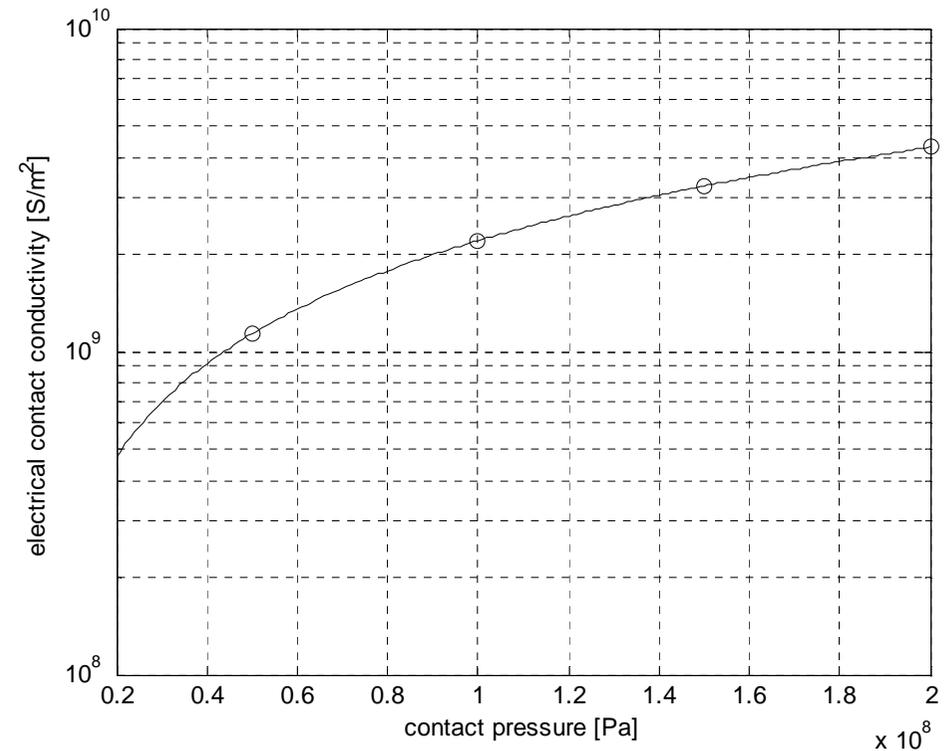
Pressione di contatto  
dipendente dalla dist.  
degli  $a$ -spot

$$\lambda = \frac{d}{\sqrt{2}r}$$

$d$  = distanza media;  
 $r$  = rugosità RMS



Superfici di contatto sulla micro-scala

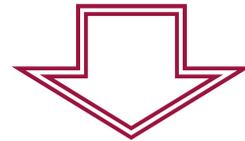


Conducibilità di contatto vs. pressione applicata

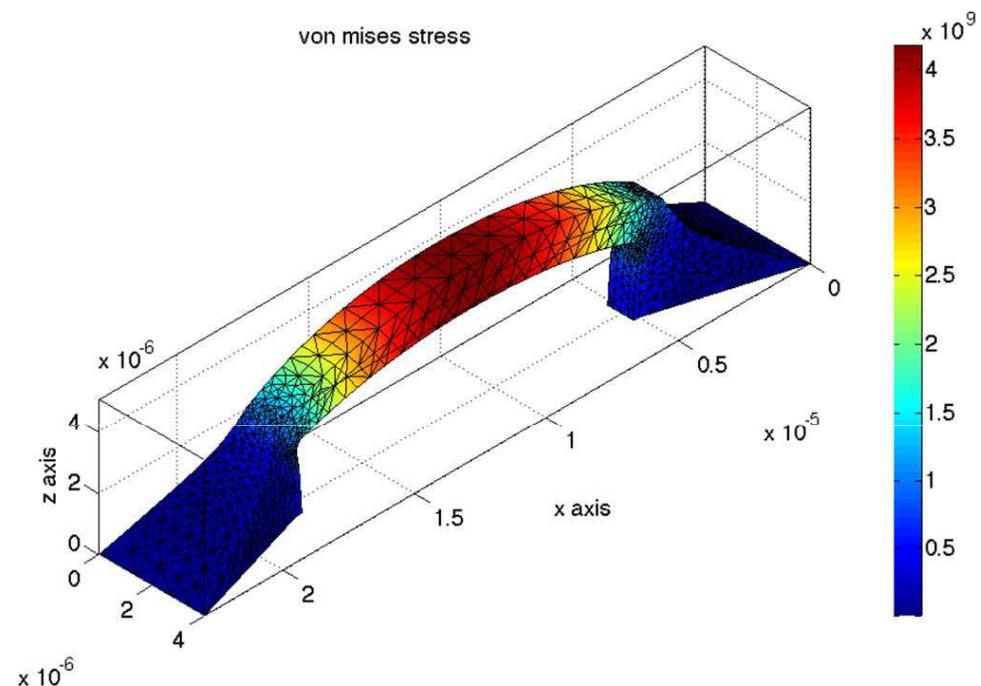
**Modello multiscala:**  
distribuzione locale di  
conducibilità inclusa nel  
modello macroscopico

# Simulazione della meccanica del contatto

La resistenza di contatto e la potenza dissipata localmente dipendono dalla pressione applicata



- Formulazione termo-elastica (bulk) costruita con metodo delle celle
- Ipotesi di piccole deformazioni e materiali elastici (coeff.  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ )
- Ipotesi di contatto normale: pressione di contatto calcolata con il metodo di penalità, l'area di contatto è assunta nota a priori



P. Alotto, F. Freschi, and M. Repetto, "Multiphysics problems via the Cell Method: the role of Tonti diagrams," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 46, pp. 2959-2962, Agosto 2010.

# Soluzione sistema elettro-termo-meccanico

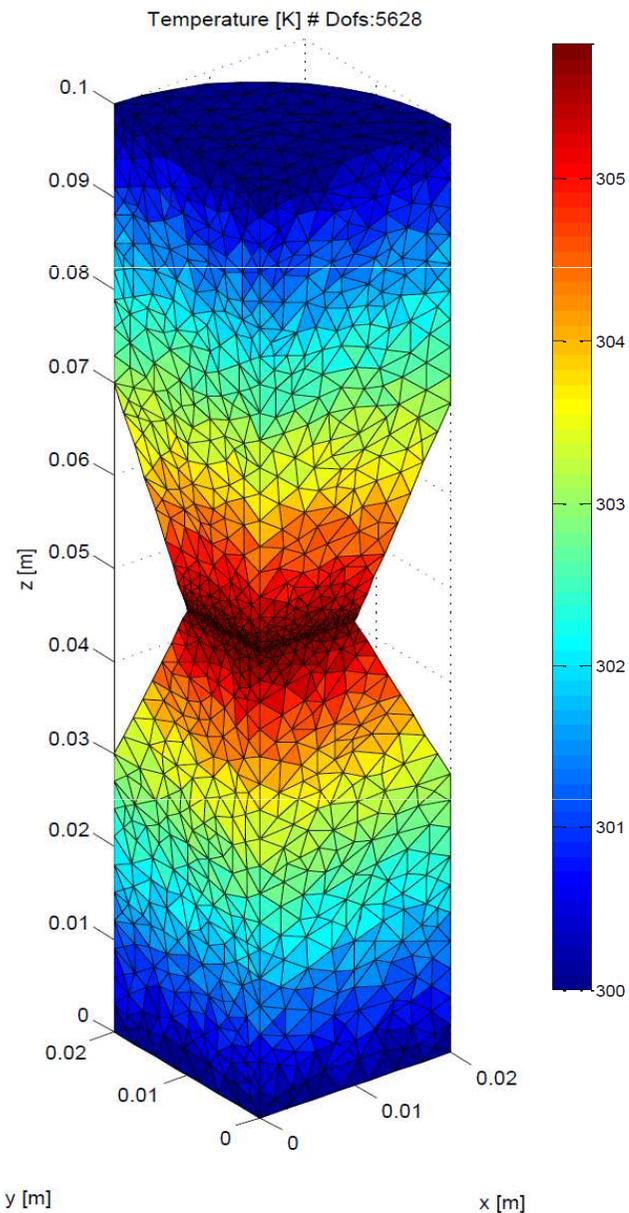
Equazioni di contatto + equazioni di bulk = problema punto-sella

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\sigma \mathbf{G} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbf{\Pi}^T & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\lambda \mathbf{G} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbf{\Pi}^T & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbf{G}^T \mathbf{M}_e \mathbf{G} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbf{\Pi}^T \\ \mathbf{\Pi} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbf{M}_{\sigma C^{-1}} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{\Pi} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbf{M}_{\lambda C^{-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbf{\Pi} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbf{M}_{e C^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \theta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{j}_m \\ \mathbf{q}_m \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_s \\ \mathbf{q}_s + \mathbf{w} \\ \mathbf{t}_s + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_{th} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

## Strategia di soluzione del sistema multiphysics

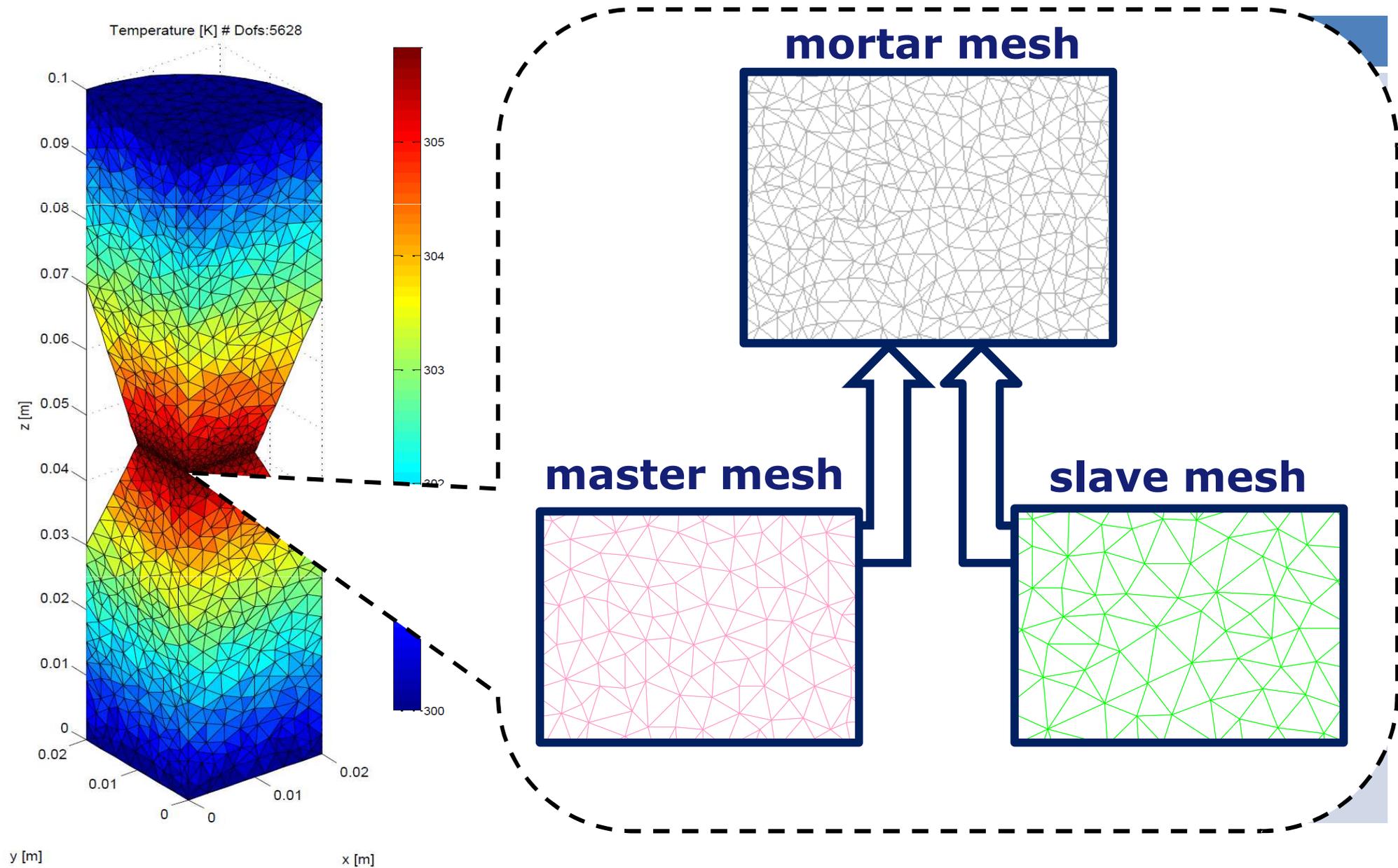
- **Metodo del complemento di Schur:** i moltiplicatori di Lagrange vengono eliminati in modo da ridurre le dimensioni del problema e migliorare il condizionamento;
- **Metodo di Newton-Raphson:** il sistema non-lineare ridotto (senza moltiplicatori di Lagrange) viene approssimato al primo ordine; ad ogni iterazione viene costruita la matrice jacobiana e si utilizza un solver diretto (Pardiso) per calcolare gli incrementi infinitesimi di potenziale/temperatura/spostamento

# Validazione modello elettro-termico (1)

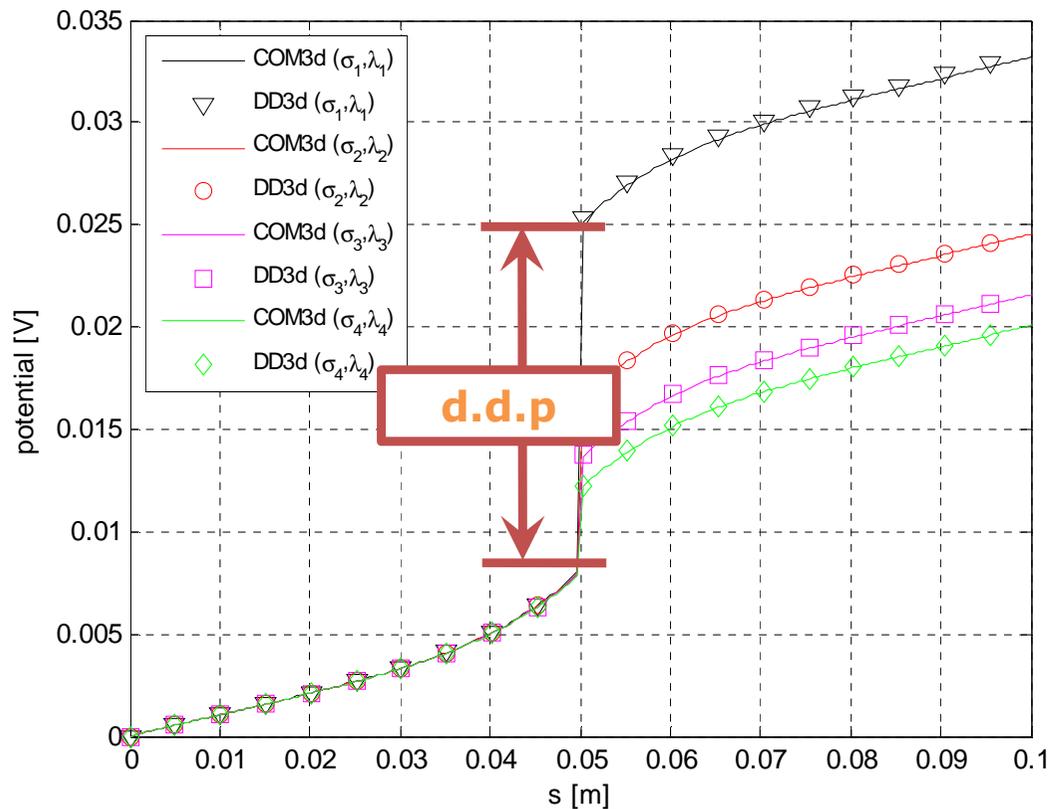


Benchmark									
<i>geometria</i>	elettrodi cilindrici (diametro $\varnothing$ 4 cm, 5 cm) in contatto alla quota $z = 5$								
<i>materiale</i>	rame ( $50 \cdot 10^6 \text{ S m}^{-1}$ ; $400 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ; $385 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ; $8700 \text{ Kg m}^{-3}$ )								
<i>condizioni di interfaccia</i>	<p>conducibilità di contatto (elettriche e termiche) per diversi valori di pressione:</p> <table border="0"> <tr> <td><math>\sigma_1 = 1.14 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}</math></td> <td><math>\lambda_1 = 9.08 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\sigma_2 = 2.22 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}</math></td> <td><math>\lambda_2 = 1.76 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\sigma_3 = 3.25 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}</math></td> <td><math>\lambda_3 = 2.60 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\sigma_4 = 4.30 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}</math></td> <td><math>\lambda_4 = 3.43 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}</math></td> </tr> </table>	$\sigma_1 = 1.14 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_1 = 9.08 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	$\sigma_2 = 2.22 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_2 = 1.76 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	$\sigma_3 = 3.25 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_3 = 2.60 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	$\sigma_4 = 4.30 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_4 = 3.43 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$
$\sigma_1 = 1.14 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_1 = 9.08 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$								
$\sigma_2 = 2.22 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_2 = 1.76 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$								
$\sigma_3 = 3.25 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_3 = 2.60 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$								
$\sigma_4 = 4.30 \cdot 10^9 \text{ S m}^{-2}$	$\lambda_4 = 3.43 \cdot 10^4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$								
<i>condizioni al contorno</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Neumann omogenee</li> <li>• <math>V=0</math> (<math>z=0</math>); <math>T=300 \text{ K}</math> (<math>z=0, z=10 \text{ cm}</math>)</li> <li>• convezione naturale (<math>20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}</math>)</li> </ul>								
<i>sorgenti</i>	<p>corrente impressa DC (<math>z=10 \text{ cm}</math>)</p> <p><math>J=5 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-2}</math></p>								

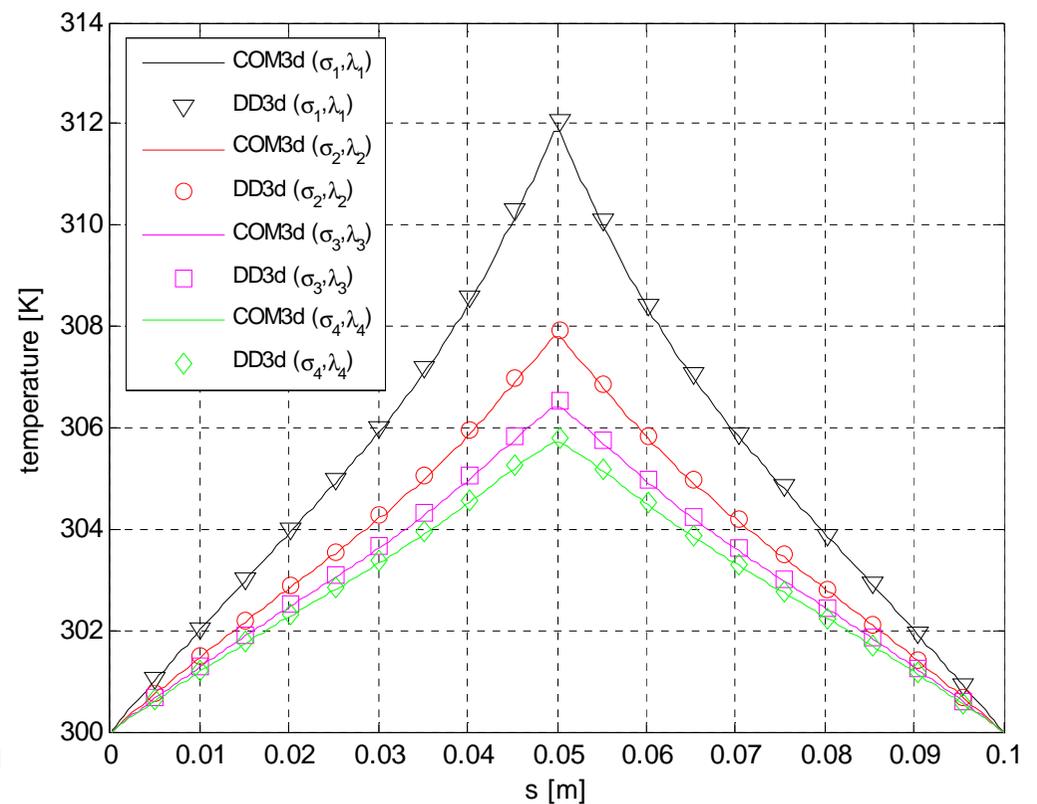
# Validazione modello elettro-termico (1)



# Validazione modello elettro-termico (2)

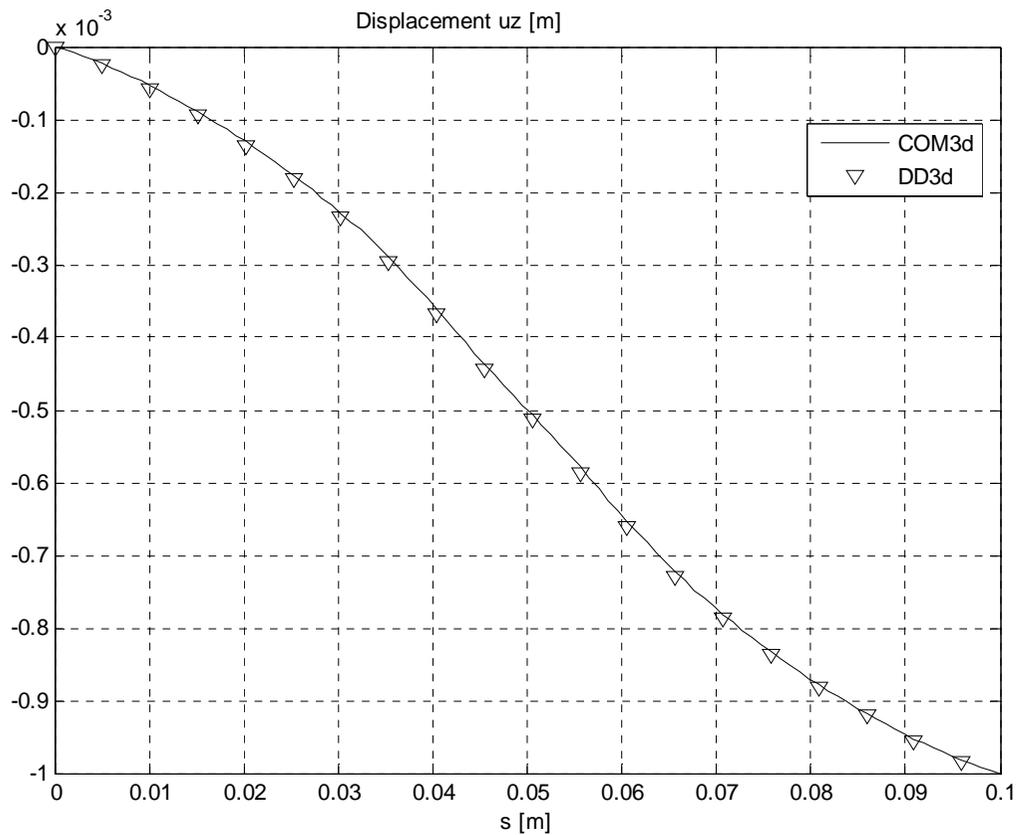


**Distribuzione di potenziale lungo l'asse verticale z al variare della conducibilità elettrica e termica di contatto**

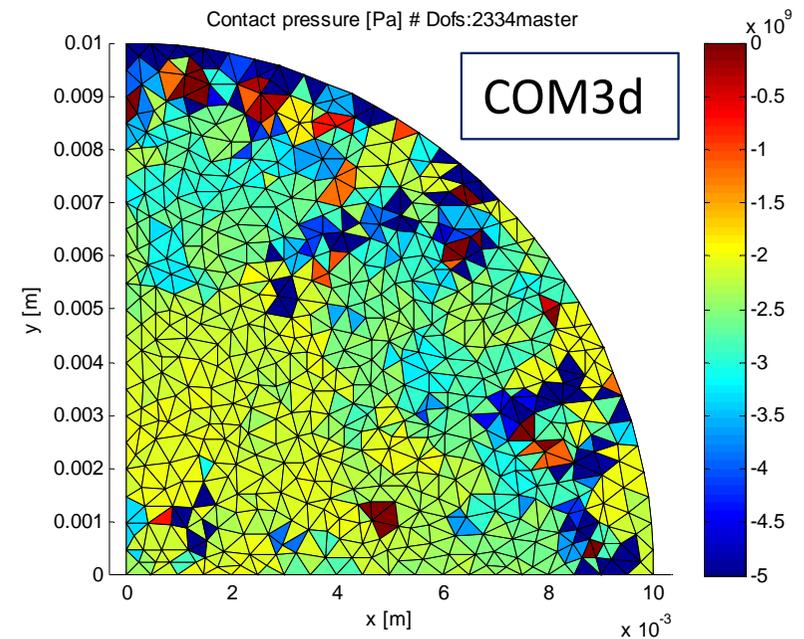
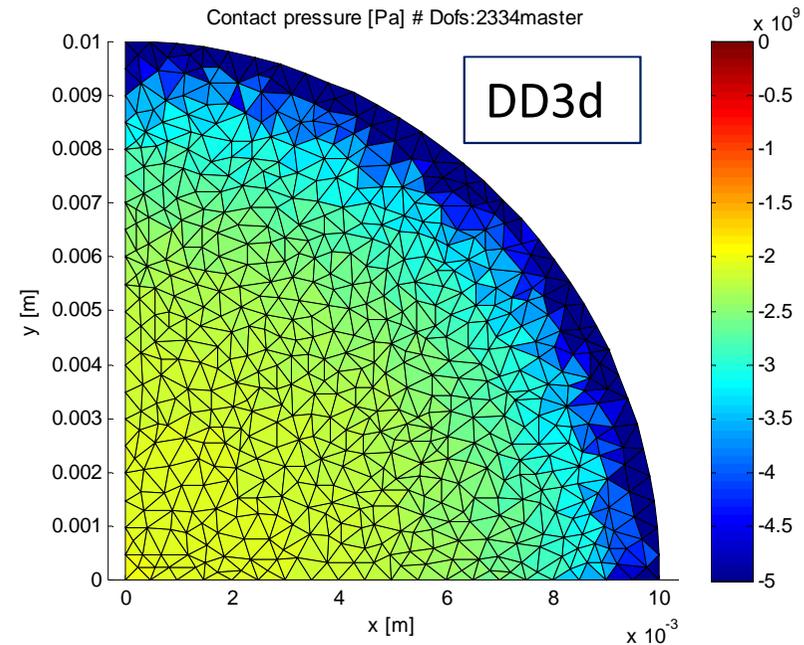


**Distribuzione di temperatura lungo l'asse verticale z al variare della conducibilità elettrica e termica di contatto**

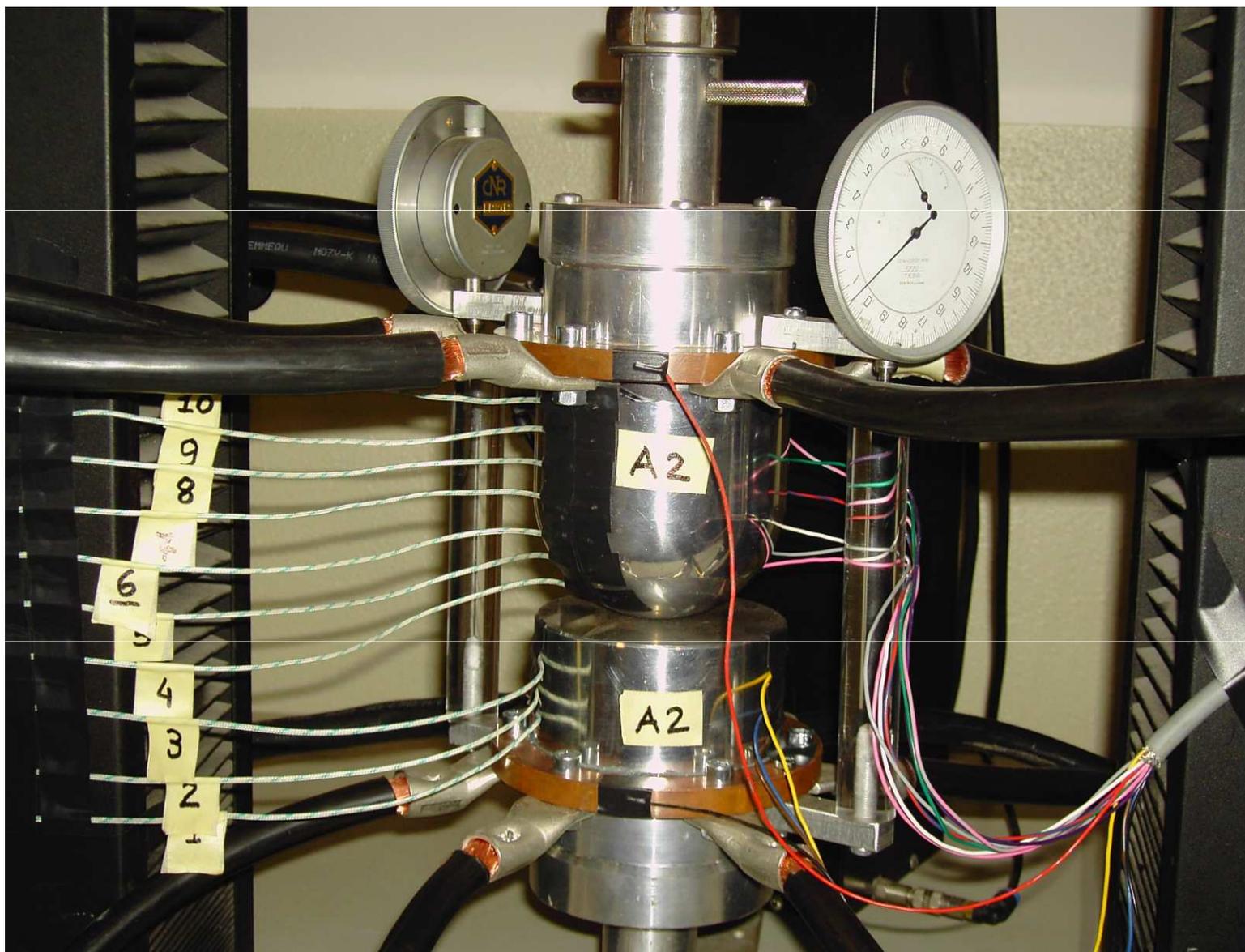
# Validazione modello meccanico



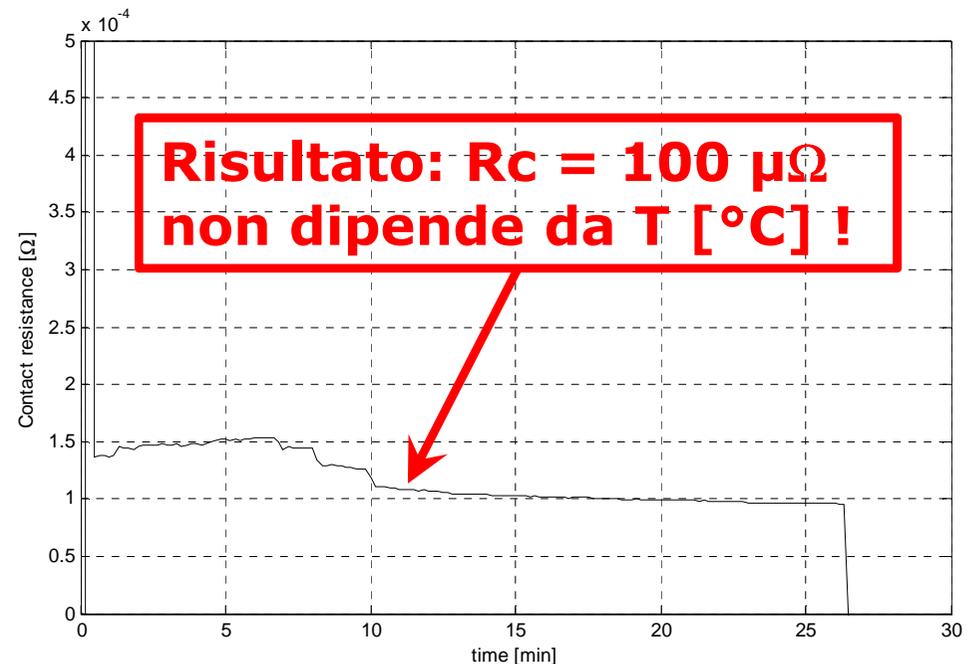
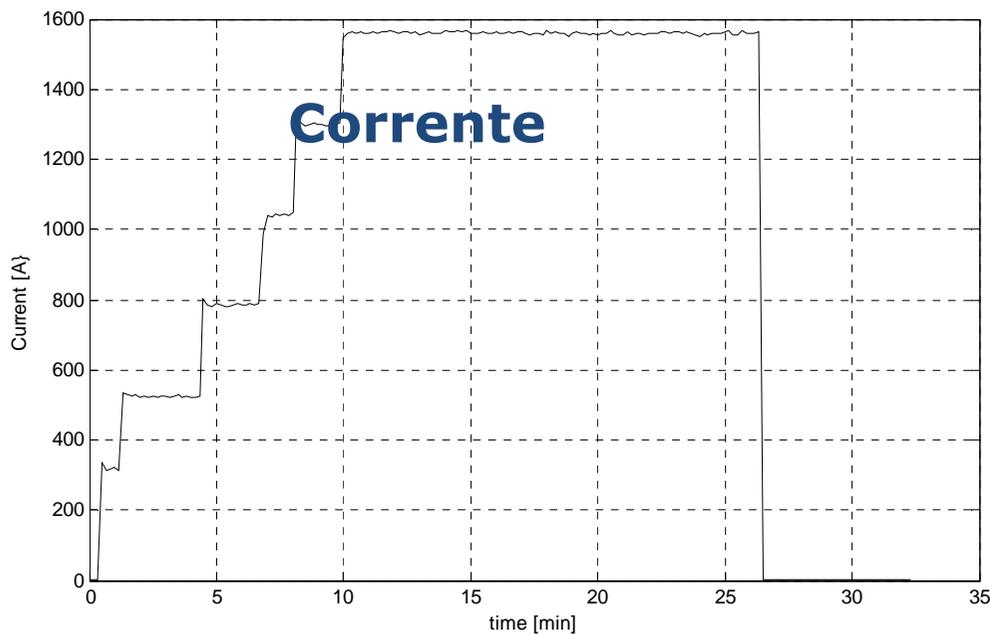
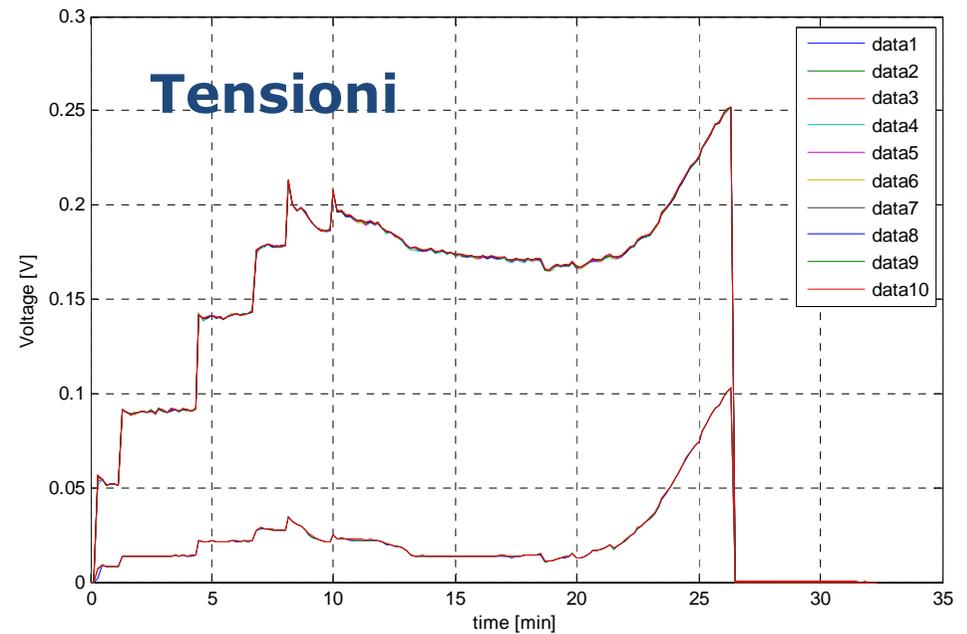
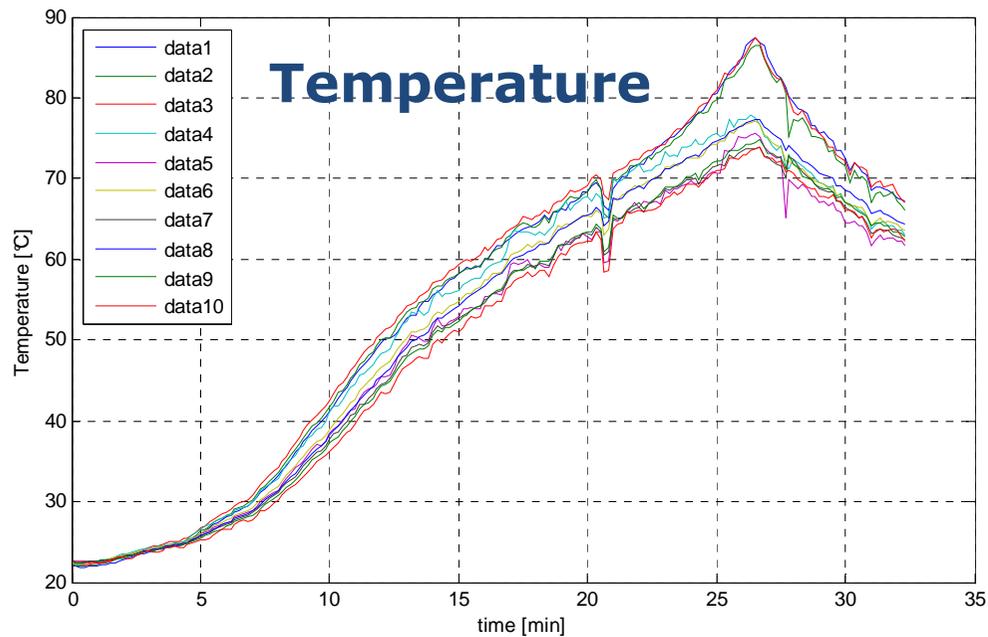
**Distribuzione di spostamento lungo l'asse verticale z (BC:  $z=0.1$ ,  $u_z = -1$  mm)**



# Attività sperimentale: apparecchiatura



# Attività sperimentale: primi risultati



# Conclusioni

- Idea base: realizzare una modellazione multiscala del contatto utilizzando una formulazione mortar
- Definito un nuovo metodo DD per l'analisi di problemi di contatto elettro-termo-meccanici
- Effettuata la validazione con software FEM 3D
- Da sviluppare:
  - ✓ validazione sperimentale
  - ✓ algoritmo di ricerca del contatto
  - ✓ modello meccanico elasto-plastico

# Grazie per l'attenzione!

Federico Moro

Dip. ing. elettrica, Università di Padova

[moro@die.unipd.it](mailto:moro@die.unipd.it)