

UN MODELLO NUMERICO PARTICELLARE PER LA MAGNETOENCEFALOGRAFIA

Guido Ala¹, Pietro L. Buccheri¹, Gianpiero Di Blasi², Elisa Francomano², Adele Tortorici², Fabio Viola¹

¹DIEET, ²DICGIM

Università degli Studi di Palermo, viale delle Scienze, 90128 Palermo

Quando il cervello elabora una informazione, una piccola quantità di carica attraversa i neuroni; le debolissime correnti associate a tale attività generano campi elettrici e magnetici normalmente rappresentabili attraverso l'approssimazione quasi stazionaria. I suddetti campi possono essere opportunamente misurati e utilizzati per una comprensione più accurata dei processi di funzionamento del cervello. Inoltre, i dati raccolti in modo non invasivo, in presenza di opportune stimolazioni esterne possono essere utilizzati per tracciare un'immagine dell'encefalo a scopo radiologico. Tra le tecniche non invasive utilizzate nella neurologia diagnostica si distinguono la MagnetoEncefaloGrafia (MEG) e l'ElettroEncefaloGrafia (EEG): esse si basano sulla misurazione dell'induzione magnetica e del campo elettrico prodotti dalla normale attività dell'encefalo. Le due tecniche citate consentono una ricostruzione approssimata delle correnti cerebrali: a partire da tali dati si possono poi ottenere informazioni sulla fisiologia cerebrale e su alcune patologie, rilevanti per la loro gravità e per la diffusione epidemiologica che le caratterizza (e.g., epilessie, morbo di Alzheimer). L'idea di base della MEG è quella di utilizzare i dati raccolti per mezzo di una schiera di SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) per ricostruire un'immagine del cervello. Ovviamente i valori di campo magnetico o elettrico non danno informazioni immediate sulla distribuzione di corrente (non può essere cioè direttamente ricostruita l'immagine a partire dai valori di campo magnetico o elettrico), ma tali dati devono essere elaborati in base ad un modello fisico-matematico che permetta di ricostruire le caratteristiche del mezzo; tale approccio costituisce un tipico caso di problema inverso. Non è in tal caso banale trovare una soluzione al problema inverso in quanto: a) il problema neuromagnetico inverso è mal condizionato; b) il problema deve essere risolto per passi temporali diversi, il che lo rende computazionalmente difficoltoso; c) sebbene gli SQUID siano estremamente sensibili, le ampiezze dell'induzione magnetica generata dall'attività neuronale sono estremamente ridotte e, inoltre, tali segnali sono caratterizzati da un rapporto segnale-rumore molto basso; d) occorre individuare un metodo per poter discriminare tra l'attività stimolata e l'attività celebrale spontanea, del tutto estranea nella fase di test MEG. L'attività di ricerca appena intrapresa, si prefigge di dare un contributo alla modellistica numerica nel contesto della MEG. L'approccio impiegato è basato sulla tecnica meshless Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), uno schema la cui popolarità è dovuta principalmente alla possibilità di calcolare una funzione incognita e le sue derivate per mezzo di una rappresentazione integrale. La intrinseca natura del metodo consente: a) di modellizzare sorgenti di eccitazione praticamente puntiformi; b) di gestire problemi multi-sorgente. Con lo scopo di approssimare una funzione $\Phi(\vec{p})$ in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ SPH definisce, tramite una funzione W , la cosiddetta *kernel approximation* di $\Phi(\vec{p})$:

$$\Phi(\vec{p}) = \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) W(\vec{p} - \vec{u}, h) d\vec{u}; \quad (1)$$

W , detta *smoothing kernel function*, dipende dalle variabili spaziali da un parametro h detto *smoothing length*. Con l'introduzione di un numero arbitrario di punti (*particelle*) la kernel approximation conduce alla *particle approximation*:

$$\Phi(\vec{p}) \cong \sum_{\vec{q} \in M_p} \Phi_q W_{qp} V_q, \quad (2)$$

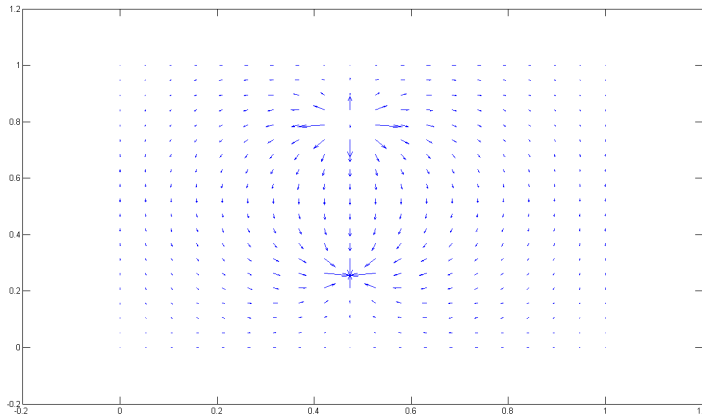
In cui M_p è l'insieme delle particelle che cadono all'interno del supporto della funzione kernel centrata in \vec{p} , $\Phi_q = \Phi(\vec{q})$, $W_{qp} = W(\vec{p} - \vec{q}, h)$, V_q è la misura del dominio che circonda la particella \vec{q} . Questa formulazione può essere resa più accurata numericamente in vari modi ad esempio attraverso la risoluzione del sistema lineare proposto in [3], usato nel modello proposto. Come già accennato, il problema può essere considerato quasi-stazionario. Indicato con $\vec{J}(\vec{p}, t)$ il campo vettoriale densità di corrente di conduzione prodotta da un'attività neurale, esso può essere ottenuto evidenziando il contributo di sorgente \vec{J}^s : $\vec{J} = \vec{J}^s - \sigma \nabla \phi$, dove ϕ è il campo del potenziale elettrico scalare e $\sigma(\vec{p}, t)$ è la conducibilità. Da ciò si deduce che vale la seguente catena di uguaglianze:

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\vec{J}^s - \sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot \vec{J}^s - \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi); \quad (3)$$

che conduce al seguente problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot \vec{J}^s & \Omega \\ \vec{n} \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 & \partial \Omega \end{cases}, \quad (4)$$

Facendo uso della *particle approximation* si perviene al modello discretizzato seguente:



$$\begin{cases} \sum_{\vec{c} \in \Omega} K_{ac} \phi_c = \nabla \cdot \vec{J}_a^s & \Omega \\ \sum_{\vec{c} \in \Omega} H_{ac} \phi_c = 0 & \partial \Omega \end{cases}, \quad (5)$$

con K_{ac} ed H_{ac} matrici opportunamente definite sfruttando il modello proposto in [3]. La valutazione numerica del campo ϕ consente il successivo calcolo della densità di corrente nel volume conduttore e dell'induzione magnetica all'esterno tramite la legge di Biot-Savart. In figura è riportata la mappa della densità di corrente ottenuta utilizzando l'approccio diretto in un caso 2D.

Bibliografia

1. Hämaläinen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R.J., Knuutila, J., Lounasmaa, O.V.: Magnetoencephalography - Theory, Instrumentation and Applications to Noninvasive Studies of the Working Human Brain, Rev. Mod. Phys. 65, 413-497 (1993)
2. Liu, G.R., Liu, M.B.: Smoothed Particle Hydrodynamics - a Mesh-Free Particle Method. World Scientific Publishing, Singapore (2003)
3. Liu, M.B., Liu, G.R.: Restoring Particle Consistency in Smoothed Particle Hydrodynamics. Appl. Numer. Math. 56, 19-36 (2006)
4. E. Francomano, A. Tortorici, E. Toscano, G. Ala, F. Viola: "On the use of a meshless solver for PDEs governing electromagnetic transients". Applied Mathematics and Computation, Vol. 209, issue 1, 2009, pp. 42-51, DOI:10.1016/j.amc.2008.06.038, Elsevier Science Publishers, ISSN: 0096-3003.