

# METODI PER L'ANALISI DI CIRCUITI NON LINEARI DI TIPO NEURALE

*Mauro Di Marco, Mauro Forti, Massimo Grazzini, Luca Pancioni*  
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione  
Università degli Studi di Siena  
Via Roma 56, 53100 Siena

L'attività di ricerca dell'Unità di Siena è stata dedicata, negli ultimi anni, prevalentemente alla analisi della dinamica di varie classi di circuiti non lineari che modellano reti neurali. Fra i principali temi di ricerca vi sono stati i seguenti: 1) analisi della robustezza della stabilità completa (convergenza) in reti neurali di tipo cellulare (CNN); 2) metodi per la convergenza di circuiti non lineari di tipo “non-smooth”; 3) metodi per la convergenza di reti neurali di tipo cooperativo.

1) *Robustezza della stabilità completa di CNN*: Sono state sviluppate diverse tecniche per lo studio sulla robustezza della stabilità completa di CNN affette da piccole perturbazioni, di tipo non-simmetrico, di una matrice di interconnessione nominalmente simmetrica. Nel lavoro [1] è stato dimostrato che la robustezza della stabilità completa è una proprietà generica (ovvero l'insieme di reti simmetriche che non sono convergenti in modo robusto è di misura nulla nello spazio dei parametri) per una classe di CNN del terzo ordine affette da una perturbazioni dipendenti da due parametri. La tecnica utilizzata permette di stimare in modo esatto il margine di robustezza della stabilità completa.

2) *Metodi per la convergenza di circuiti non lineari di tipo “non-smooth”*: La proprietà di convergenza delle reti neurali verso un punto di equilibrio è fondamentale per molte applicazioni alla soluzione in tempo reale di problemi di elaborazione di segnali. In [2] è stato proposto un nuovo metodo di analisi della stabilità completa, per una classe di reti di Cohen-Grossberg, basato sull'impiego di una disuguaglianza di Lojasiewicz. Viene mostrato che per tali reti la convergenza è sempre di tipo esponenziale, anche quando i punti di equilibrio sono non isolati. In [3,9] vengono estesi risultati di convergenza, di stabilità asintotica ed esponenziale globale a modelli di circuiti non lineari con funzioni di attivazione discontinue o a più valori, come le reti CNN di tipo ‘full-range’. Utilizzando le metodologie dell'analisi multivoca, è stato possibile ricavare criteri di applicabilità generale. In [4,5] è stato sviluppato (attraverso l'introduzione di una opportuna derivata a più valori) un metodo di Lyapunov, analogo a quello per le equazioni differenziali tradizionali, per il modello ‘full-range’ delle CNN. Tale modello è descritto da una particolare classe di inclusioni differenziali dette *disequazioni differenziali variazionali* (DVI). Inoltre è stata dimostrata la validità di una versione estesa del *principio di invarianza di LaSalle*.

3) *Metodi per la convergenza di reti neurali di tipo cooperativo*: Una CNN standard cooperativa (con interconnessioni eccitatorie) definisce un flusso di soluzioni monotono. Pur assumendo l'irriducibilità della matrice di interconnessione, a causa dei tratti orizzontali delle attivazioni lineari a tratti, il flusso non è però fortemente monotono. Sono state anche individuate CNN con matrici irriducibili per cui non vale la dicotomia degli insiemi omega-limite, sia nel caso senza ritardo che nel caso di ritardi nelle interconnessioni [6,7]. E' stata intrapresa un'indagine teorica sulla possibilità di estendere alcune tecniche di analisi, valide per sistemi di tipo fortemente monotono, in modo che possano essere applicate a sistemi monotoni che descrivono la dinamica di CNN. Alcuni risultati di base, ottenuti in [10,14], riguardano la dimostrazione di una forma di dicotomia per gli insiemi omega-limite, e la

convergenza per quasi ogni soluzione, per una classe di CNN circolari definita da ‘template’ non-simmetrici e condizioni al contorno periodiche. In [12] è stata dimostrata un’analoga forma della dicotomia per reti neurali di Hopfield completamente interconnesse e con attivazioni lineari a tratti. E’ stato inoltre mostrato che si ha convergenza generica delle soluzioni verso un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

### Bibliografia

- [1] M. Di Marco, M. Forti, A. Tesi, “On the margin of complete stability for a class of cellular neural networks,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 18, n. 5, pp.1343-1361, May 2008.
- [2] M. Forti, “Convergence of a subclass of Cohen-Grossberg neural networks via the Lojasiewicz inequality,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics B*, vol. 38, n.1 pp. 252-257, February 2008.
- [3] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “On global exponential stability of standard and full-range CNNs,” *Int. J. Circuit Theory Applicat*, vol. 36, n. 5-6, pp.653-680, July-September 2008.
- [4] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, and L. Pancioni, “Lyapunov Method and Convergence of the Full-Range Model of CNNs,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2008, vol. 55, n. 11, pp. 3528-3541, December 2008.
- [5] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Extended LaSalle's invariance principle for Full-Range Cellular Neural Networks,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2009, Article ID 730968, 10 pages, 2009. doi:10.1155/2009/730968.
- [6] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “The dichotomy of omega-limit sets fails for cooperative standard CNNs,” *Proc. of 12th Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA 2010)*, Berkeley CA, USA, 3-5 February 2010.
- [7] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “A note on dichotomy of limit sets for cooperative CNNs with delays,” *Proc. of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Paris, France, 20 May - 2 June 2010.
- [8] W. Allegretto, D. Papini, M. Forti, “Common asymptotic behavior of solutions and almost periodicity for discontinuous, delayed, and impulsive neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 21, pp. 1110-1125, July 2010.
- [9] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Lojasiewicz inequality and exponential convergence of the Full-Range model of CNNs,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, pubblicato online, 2 Aug. 2010, DOI:10.1002/cta.717.
- [10] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Limit set dichotomy and convergence of semiflows defined by cooperative standard CNNs,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, n. 11, pp. 3549-3563, November 2010.
- [11] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, A. Premoli, “Comparison of convergence and stability properties for the state and output solutions of neural networks,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, pubblicato online, 21 Nov 2010, DOI:10.1002/cta.657.
- [12] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, “Limit set dichotomy and convergence of cooperative piecewise linear neural networks,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 57, no. 5, pp. 1052-1062, May 2011.
- [13] Di Marco, M. Grazzini, L. Pancioni, “Global robust stability criteria for interval delayed full-range cellular neural networks,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 22, no. 4, pp. 666-671, April 2011.
- [14] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini and L. Pancioni, “Further Results on Convergence of Cooperative Standard Cellular Neural Networks,” *Proc. of 2011 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Rio de Janeiro, Brazil, 15 -18 May, 2011.